第12講　指数を含む方程式・不等式，対数の性質と計算

§1 指数の相等と指数方程式

要点整理 と 公式

要点1 指数の相等と指数方程式

$a>0$，$a \neq 1$，つまり a を 1 でない正の定数とするとき，以下のことがいえる。

■ 指数の相等

$p=q \iff a^p=a^q$

このことを利用して，指数関数を含む方程式を解く。

(ex) 方程式 $8^x=4$ を解く。

$8^x=(2^3)^x=2$　，　$4=2$　より

$2^{3x}=2^2$

よって $3x=2$

ゆえに $x=\dfrac{2}{3}$

このように，指数関数を含む方程式においては，「　　」を揃えることで解くことができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の方程式を解け。

（1）　$9^x = 243$　　（2）　$32^x = \dfrac{1}{16}$　　（3）　$4^x + 2^x - 2 = 0$

Point Pickup

指数を含む方程式（指数方程式）

$\Longrightarrow$ 「底」を揃えて，指数の性質

$$p = q \iff a^p = a^q$$

を利用する。

また，a^{2x} と a^x が混じった方程式は，「おき換え」 $\Longrightarrow$ 「2 次方程式」が有効。

ただし，$a^x > 0$ より，おき換えた文字も正であることに注意。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 累乗根の大小，指数不等式

要点整理 と 公式

要点2 累乗根の大小

指数関数 $y = a^x$ のグラフより，次のことがいえる。

■ 指数の大小と累乗根の大小

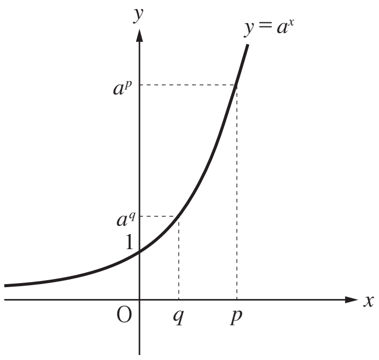
$a > 1$ のとき　　x の値が増加すると y の値は増加する

　つまり，　$p > q \iff a^p > a^q$

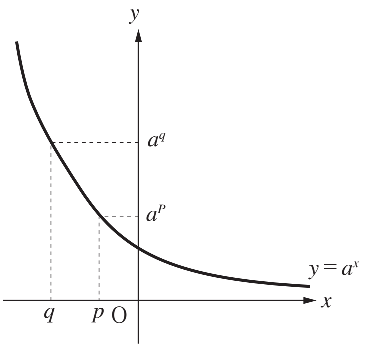
$0 < a < 1$ のとき　x の値が増加すると y の値は減少する

　つまり　$p > q \iff a^p < a^q$

$a > 1$ のとき



$0 < a < 1$ のとき



(ex) $\sqrt{8}$ と $\sqrt[5]{16}$ の大小を考える。

$\sqrt{8} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$ ，　$\sqrt[5]{16} = (2^4)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{4}{5}}$

指数の大小について　$\dfrac{4}{5} < \dfrac{3}{2}$

底 2 は「　　　　　　　」から　$2^{\frac{4}{5}}$　　$2^{\frac{3}{2}}$　　つまり $\sqrt[5]{16} < \sqrt{8}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点3 指数を含む不等式

指数関数の大小に関する性質を利用して，指数関数を含む不等式を解く。

(ex) 不等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > \dfrac{1}{32}$ を解く。

変形すると $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > \left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

底 $\dfrac{1}{2}$ は「　　　　　　　　　　　　　　　」から x 　 5

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

［1］$\dfrac{1}{9}$，$\sqrt[4]{27}$，1 の大小を，不等号を用いて表せ。

［2］次の不等式を解け。

(1)　$4^x < 64$　　　(2)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x \geqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$

Point Pickup

指数の大小と累乗根の大小

$\Longrightarrow$「底」を揃えて，指数の性質

$a > 1$ のとき　$p > q \iff a^p > a^q$（不等号の向きは同じ）

$0 < a < 1$ のとき　$p > q \iff a^p < a^q$（不等号の向きが逆になる）

を利用する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▸ 対数

要点整理 と 公式

要点4 対数の定義

指数関数 $y = 2^x$ の値域は，$y > 0$ である。

よってそのグラフから，どのような正の数 M に対しても

$M = 2^x$　　　　つまり $2^x = M$

を満たす実数 x がただ 1 つ定まる。

例えば，$2^x = 8$　より　$x = 3$

$2^x = 4$　より　$x = 2$　と定まる。

ところが，$2^x = 5$　を満たす x は確かに存在するが，その x は「無理数」，つまり循環しない無限小数となる。よって，このような x を表すために，新しい記号を定義する。

一般に，$a > 0$，$a \neq 1$ とするとき，どのような正の数 M に対しても

$a^p = M$

を満たす実数 p がただ 1 つ定まる。この p の値を「　　　　」と表し，

a を「　　」とする M の「　　　」という。

また，$\log_a M$ における M を，この対数の「　　　」という。対数の真数は，正の数である。

■ **指数と対数**

$a > 0$，$a \neq 1$，$M > 0$ のとき

$a^p = M \iff p = \log_a M$

(ex) $2^4 = 16$　より　$4 =$　　　16

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

対数　$\log_9 3$　の値を求める。

$\log_9 3 = p$　とおくと，　　　より $3^{2p} = 3$　　　よって　$p = \dfrac{1}{2}$ である。

一般に，次の等式が成り立つ。

$$\log_a a^p = p$$

(ex) $\log_2 16 = \log_2 2^4 =$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］　次の関係を $\log_a M = p$ 　の形に書け。

（1）　$2^6 = 64$ 　　（2）　$3^{-2} = \dfrac{1}{9}$ 　　（3）　$9^{\frac{1}{2}} = 3$

［2］次の対数の値を求めよ。

（1）　$\log_{10} 1000$ 　　（2）　$\log_3 \sqrt{3}$ 　　（3）　$\log_4 \dfrac{1}{16}$

Point Pickup

対数

$a > 0$，$a \neq 1$，$M > 0$のとき　　$a^p = M$ 　$\Longleftrightarrow$ 　$p = \log_a M$

つまり，対数　$\log_a M$ の値は，底 a を「何乗」すると真数 M になるか，である。

よって，$\log_a a^p = p$ 　が成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 対数の性質

要点整理 と 公式

要点5 対数の性質

$a^0 = 1$，$a^1 = a$　より，次のことが成り立つ。

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

また，「指数法則」と対数の定義から，対数の性質が導かれる。

$p = \log_a M$，$q = \log_a N \cdots$ ①　とすると，$a^p = M$，$a^q = N$

「M と N の積」について　$MN = a^p \times a^q = a$

これを対数を使って表すと　$\log_a MN = p + q \cdots$ ②

①，②より $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

「M と N の商」について　$\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^p}{a^q} = a$

これを対数を使って表すと　$\log_a \dfrac{M}{N} = p - q \cdots$ ③

①，③より $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

「M の k 乗」について　$M^k = (a^p)^k = a$

これを対数を使って表すと　$\log_a M^k = kp \cdots$ ④

①，④より $\log_a M^k = k \log_a M$

■ 対数の性質

$a > 0$，$a \neq 1$，$M > 0$，$N > 0$，k が実数のとき

① $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

② $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

③ $\log_a M^k = k \log_a M$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛メモ｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

次の計算をせよ。

(1) $\log_8 2+\log_8 32$

(2) $\log_5 6-\log_5 30$

(3) $3\log_2\sqrt[3]{6}-\log_2 3$

(4) $\log_3\dfrac{\sqrt{6}}{3}+2\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 6$

Point Pickup

対数の性質

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$, kが実数のとき

① $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$ $\Longleftrightarrow$ ①′ $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

② $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$ $\Longleftrightarrow$ ②′ $\log_a M-\log_a N=\log_a\dfrac{M}{N}$

③ $\log_a M^k=k\log_a M$ $\Longleftrightarrow$ ③′ $k\log_a M=\log_a M^k$

対数の計算においては，①，②，③を用いて「分けていく」か，

①′，②′，③′ を用いて「まとめていく」か，のいずれかの手法をとる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　確認テスト

1　方程式 $25^x = 5$　の解は $x = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

2　(1)　次の 3 つの数の大小を不等号を用いて表すと $\boxed{\text{ウ}} < \boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$ である。

①　$\sqrt[3]{36}$　　②　1　　③　$\sqrt{6}$

(2)　不等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \leqq \dfrac{1}{16}$　の解は $\boxed{\text{カ}}$ である。$\boxed{\text{カ}}$ にあてはまるものを

①　$x \leqq 4$　　②　$x \geqq 4$　から 1 つ選べ。

3　(1)　$2^3 = 8$ を　$\log_a M = p$ の形で表すと $\log_2 \boxed{\text{キ}} = \boxed{\text{ク}}$ である。

(2)　$\log_3 \dfrac{1}{27} = \log_3 3^{\boxed{\text{ケコ}}} = \boxed{\text{ケコ}}$ である。

4　次の計算をせよ。

(1)　$\log_4 2 + \log_4 8 = \boxed{\text{サ}}$　　(2)　$\log_3 2 - \log_3 18 = \boxed{\text{シス}}$

(3)　$\log_2 18 - 4\log_2 \sqrt{3} = \boxed{\text{セ}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　指数を含む方程式・不等式，対数の性質と計算

1

(1)　$9^x = 243$

$3^{2x} = 3^5$

よって　$2x = 5$　　したがって　$x = \dfrac{5}{2}$

(2)　$32^x = \dfrac{1}{16}$

$2^{5x} = 2^{-4}$

よって　$5x = -4$　　したがって　$x = -\dfrac{4}{5}$

(3)　$4^x + 2^x - 2 = 0$

$4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$　より

$(2^x)^2 + 2^x - 2 = 0$

$2^x = t$　とおくと，$t > 0$　であり

$t^2 + t - 2 = 0$

$(t+2)(t-1) = 0$

$t > 0$　より　$t = 1$

よって，$2^x = 1$　より　$x = 0$

2

［1］　$\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3^2} = 3^{-2}$，　$\sqrt[4]{27} = (3^3)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}$，　$1 = 3^0$

指数の大小について　$-2 < 0 < \dfrac{3}{4}$

底3は1より大きいから　$3^{-2} < 3^0 < 3^{\frac{3}{4}}$　　つまり　$\dfrac{1}{9} < 1 < \sqrt[4]{27}$

［2］　(1)　$4^x < 64$

$2^{2x} < 2^6$

底2は1より大きいから　$2x < 6$　よって $x < 3$

(2)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x \geqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \geqq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$$

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから $2x \leqq x-2$　よって　$x \leqq -2$

3

［1］（1）$\log_2 64 = 6$　（2）$\log_3 \frac{1}{9} = -2$　（3）$\log_9 3 = \frac{1}{2}$

［2］（1）$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$

（2）$\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

（3）$\log_4 \frac{1}{16} = \log_4 \frac{1}{4^2} = \log_4 4^{-2} = -2$

4

（1）$\log_8 2 + \log_8 32 = \log_8 (2 \times 32) = \log_8 64 = \log_8 8^2 = 2$

（2）$\log_5 6 - \log_5 30 = \log_5 \frac{6}{30} = \log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1$

（3）$3\log_2 \sqrt[3]{6} - \log_2 3 = \log_2 \left(6^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \log_2 3 = \log_2 6^{\frac{1}{3} \times 3} - \log_2 3 = \log_2 6 - \log_2 3$

$= \log_2 \frac{6}{3} = \log_2 2 = 1$

（4）$\log_3 \frac{\sqrt{6}}{3} + 2\log_3 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_3 6 = \log_3 \frac{\sqrt{6}}{3} + \log_3 \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \log_3 6^{\frac{1}{2}}$

$= \log_3 \frac{\sqrt{6}}{3} + \log_3 3 - \log_3 \sqrt{6}$

$= \log_3 \frac{\sqrt{6} \times 3}{3 \times \sqrt{6}} = \log_3 1 = 0$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　確認テスト

1 方程式 $25^x = 5$ の解は $x = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

2 (1) 次の3つの数の大小を不等号を用いて表すと $\boxed{ウ} < \boxed{エ} < \boxed{オ}$ である。

① $\sqrt[3]{36}$　　② 1　　③ $\sqrt{6}$

(2) 不等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \leqq \dfrac{1}{16}$ の解は $\boxed{カ}$ である。$\boxed{カ}$ にあてはまるものを

① $x \leqq 4$　　② $x \geqq 4$　から1つ選べ。

3 (1) $2^3 = 8$ を $\log_a M = p$ の形で表すと $\log_2 \boxed{キ} = \boxed{ク}$ である。

(2) $\log_3 \dfrac{1}{27} = \log_3 3^{\boxed{ケコ}} = \boxed{ケコ}$ である。

4 次の計算をせよ。

(1) $\log_4 2 + \log_4 8 = \boxed{サ}$　　(2) $\log_3 2 - \log_3 18 = \boxed{シス}$

(3) $\log_2 18 - 4\log_2 \sqrt{3} = \boxed{セ}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

1　ア　1　　イ　2

2　(1)　ウ　②　　エ　③　　オ　①

(2)　カ　②

3　(1)　キ　8　　ク　3

(2)　ケ　－　　コ　3

4　(1)　サ　2　　(2)　シ　－　　ス　2　　(3)　セ　1

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。